Eine neue Methode beliebige rationale Brüche in einfache Brüche aufzulösen*

Leonhard Euler

§**1** Es sei ein beliebiger Bruch $\frac{P}{Q}$ vorgelegt, dessen Zähler P wie Nenner Q ganz rationale Funktionen der variablen Größe z seien, dessen Nenner Q aber das Produkt aus beliebig vielen einfachen Faktoren der Form $z \pm a$ ist, ob einander gleich oder ungleich, und es bekannt, dass dieser Bruch immer in einfache Brüche aufgelöst werden kann, deren einzelne Nenner aus den Faktoren von Q gebildet sind, die Nenner hingegen konstante Größen sind, wenn freilich die Variable z im Zähler P zu weniger Dimensionen ansteigt als im Nenner Q, weil ja andernfalls außer diesen Brüchen darüber hinaus ganze Anteile hinzuzufügen wären. Weil dieser Fall keine Schwierigkeiten bereitet, weil diese ganzen Teile leicht gefunden werden, während der Zähler P tatsächlich durch den Nenner Q geteilt wird, wird es genügen, nur Brüche solcher Art betrachtet zu haben, in deren Nenner Q die Variable z zu höheren Potenzen ansteigt als im Zähler P. Dann also, wannimmer für die einzelnen Faktoren des Nenners Q einfache selbigen entsprechende Brüche gefunden worden sind, wird die Summe all dieser Brüche dem vorgelegten Bruch $\frac{P}{Q}$ gleich werden. Ich habe freilich als erster in meiner *Introductione* ad Analysin infinitorum eine hinreichend einfache Methode angegeben, mit deren Hilfe all diese Partialbrüche für die einzelnen Faktoren des Nenners

*Originaltitel: "Nova methodus fractiones quascumque rationales in fractiones simplices resolvendi", first published in: *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 1780: I* (1783, geschrieben 1775): pp. 29 – 46, Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 1, Band 6, pp. 370 – 383, Eneström Nummer E540, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

gefunden werden können, ohne dabei die übrigen zu berücksichtigen, denen zuvor immer Rechnung getragen werden musste. Danach aber habe ich diese Methode weiter ausgearbeitet und umfassender gezeigt, wie sie mithilfe des Differentialkalküls leichter angewandt werden kann. Nun hat sich mir aber eine völlige neue Idee offenbart, dieselbe Auflösung durchzuführen, welche zumeist die Aufgabe nicht unwesentlich zu erleichtern scheint. Aber sie kann insbesondere auf transzendente Funktionen mit wundersamer Leichtigkeit angewandt werden, woher es nach meinem Dafürhalten der Mühe wert sein wird, wenn ich diese neue Methode genauer erklären werde.

§2 Es sei also $z-a$ ein einfacher Faktor des Nenners Q, entweder ein alleiniger oder mit beliebiger Vielfachheit auftretend. Und im ersten Fall wird der daraus zu entspringende einfache Bruch $\frac{\alpha}{z-a}$ sein. Wenn aber der Nenner zwei gleiche Faktoren von dieser Art involviert, natürlich $(z-a)^2$, dann wird die Auflösung die zwei einfachen Brüche $\frac{\alpha}{(z-a)^2}+\frac{\beta}{z-a}$ geben; wenn er aber den kubischen Faktor $(z-a)^3$ hat, werden die daraus entspringenden Brüche $\frac{\alpha}{(z-a)^3}+\frac{\beta}{(z-a)^2}+\frac{\gamma}{z-a}$ sein und so weiter für die höheren Potenzen. Also geht die ganze Aufgabe darauf zurück, dass für die einzelnen Faktoren von dieser Art die Zähler α, β, γ etc. bestimmt werden, für welche Untersuchung ich einst die Vorschriften angegeben habe. Aber die neue Methode, die ich hier mitteilen werde, ist auf dieses Prinzip gestützt, dass für $z=a$ gesetzt all diese Partialbrüche unendlich werden, während alle übrigen von endlicher Größe bleiben und daher im Vergleich zu jenen gleichsam verschwinden. Wenn also im vorgelegten Bruch $\frac{P}{Q}$ direkt $z=a$ gesetzt wird, wird er natürlich auch bis ins Unendliche wachsen und sein Wert wird entsprechend entwickelt jene einfachen ins Unendliche übergehende Brüche liefern, was ich hier genauer untersuchen werde.

§3 Damit also die Betrachtung des Unendlichen keine Sorgen bereitet, wollen wir nicht $z-a=0$ sondern $z-a=\omega$ setzen, während ω eine unendlich kleine und sogar verschwindende Größe bezeichnet, und wollen so im Zähler P wie im Nenner Q überall $z=a+\omega$ setzen, wonach der Zähler P in eine Form von dieser Art entwickelt werde

$$P=A+B\omega+C\omega\omega+D\omega^3+\text{etc.},$$

aber der Nenner Q, weil er per Annahme für $z=a$ gesetzt verschwindet, wird eine solche Form annehmen

$$Q = \mathfrak{A}\omega + \mathfrak{B}\omega\omega + \mathfrak{C}\omega^3 + \mathfrak{D}\omega^4 + \text{etc.},$$

wo, wenn der Faktor $z - a$ ein alleiniger war, der erste Term $\mathfrak{A}\omega$ notwendig hinzutritt. Aber wenn der Nenner Q den Faktor $(z-a)^2$ hat, wird $\mathfrak{A} = 0$ sein und der Nenner mit dem Term $\mathfrak{B}\omega^2$ beginnen. Wenn aber $(z-a)^3$ ein Faktor des Nenners war, wird der erste Term im Nenner $\mathfrak{C}\omega^3$ sein, und so weiter, sodass, wenn der Faktor im Allgemeinen $(z-a)^n$ war, die unterste Potenz im Nenner $\mathfrak{N}\omega^n$ ist.

§4 Diese Substitution erfordert durch Setzen von $z = a + \omega$ nur gewöhnliche algebraische Operationen; indes kann sie dennoch nach den bekannten Lehren der Differentiale sehr stark vereinfacht werden. Denn wenn im Allgemeinen $z + \omega$ anstelle von z geschrieben wird, wird jede beliebige Funktion P von z diesen Wert annehmen

$$P + \frac{\omega dP}{1dz} + \frac{\omega\omega ddP}{1 \cdot 2dz^2} + \frac{\omega^3 d^3 P}{1 \cdot 2 \cdot 3dz^3} + \frac{\omega^4 d^4 P}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4dz^4} + \text{etc.}$$

Auf diese Weise wird also sofort die Form so des Zählers P wie des Nenners Q nach Potenzen von ω geordnet gefunden werden und es ist nur notwendig, dass in den einzelnen Termen anstelle von z überall a geschrieben wird. Wie aber diese Ausdrücke nach den Potenzen von ω fortgesetzt werden müssen, wird aus dem ersten Term des Nenners oder der untersten Potenz von ω leicht entschieden werden, weshalb wir die folgenden Fälle entwickeln wollen.

Fall I,
in welchem $z - a$ ein Faktor des Nenners Q ist

§5 Also wird in diesem Fall nicht $\mathfrak{A} = 0$ sein, woher unser Bruch $\frac{P}{Q}$ für $z = a + \omega$ gesetzt diese Form annehmen wird

$$\frac{1}{\omega} \cdot \frac{A + B\omega + C\omega^2 + D\omega^3 + \text{etc.}}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\omega + \mathfrak{C}\omega^2 + \mathfrak{D}\omega^3 + \text{etc.}},$$

wo dieser Bruch durch Teilung nur bis hin zur ersten Potenz ω entwickelt werde, weil im vorangestellten Bruch $\frac{1}{\omega}$ dieser Buchstabe nur eine Dimension hat, woher es in diesem Fall genügt, so den Zähler P wie der Nenner Q nur bis hin zu zwei Termen erstreckt zu haben, sodass er

$$\frac{1}{\omega} \cdot \frac{A + B\omega}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\omega}$$

ist. Nun entspringe also aus der Entwicklung dieses Bruchs $\frac{A+B\omega}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\omega}$ der Quotient $\alpha + \beta\omega$ und es wird

$$\alpha = \frac{A}{\mathfrak{A}}, \quad \beta = \frac{B}{\mathfrak{A}} - \frac{A\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}^2}$$

sein. Nachdem aber diese Werte gefunden worden sind, wird unser Bruch in diese Teile gespalten

$$\frac{\alpha}{\omega} + \beta;$$

weil deren erster nur unendlich wird, wenn wir anstelle von ω wieder $z - \alpha$ einsetzen, wird der einfache daraus resultierende Bruch

$$\frac{\alpha}{z-a}$$

sein. Also werden auf diese Weise sehr leicht die einfachen Brüche aus den einzelnen einfachen Faktoren der Form $z - a$ des Nenners Q erhalten; und es ist sogar nicht vonnöten den Wert von β zu kennen, woher es ausgereicht hätte, nur die ersten Terme A und $\mathfrak{A}$ ausfindig gemacht zu haben. Aber A entspringt aus dem Zähler P für $z = a$ gesetzt; $\mathfrak{A}$ allerdings entspringt aus der Formel $\frac{dQ}{dz}$, nachdem ebenso $z = a$ gesetzt worden ist. Weil nämlich für $z = a$ gesetzt $Q = 0$ wird, wenn $z + \omega$ anstelle von z geschrieben wird, wird $\mathfrak{A} = \frac{dQ}{dz}$ hervorgehen.

§6 Dennoch ist es indes gut, auch den Wert von β zu kennen, weil ja daraus eine nicht gerade wenig kuriose Frage leicht beantwortet werden kann. Weil nämlich aus dem Faktor $z - a$ der Bruch $\frac{\alpha}{z-a}$ abgeleitet worden ist, wenn wir für alle übrigen Terme den Buchstaben R schreiben, wird natürlich $\frac{P}{Q} = \frac{\alpha}{z-a} + R$ sein. Wenn also die Summe aller übrigen Terme R im Fall $z = a$ oder $z = a + \omega$ verlangt wird, welche Summe natürlich endlich ist, wird aus der gerade gefundenen Gleichung $R = \frac{P}{Q} - \frac{\alpha}{z-a}$ und daher wird für $z = a + \omega$ gesetzt

$$R = \frac{\alpha}{\omega} + \beta - \frac{\alpha}{\omega} = \beta;$$

und so drückt der Wert des Buchstaben β, den wir gefunden haben, die Summe aller übrigen Terme für den Fall $z = a$ aus. Es war aber $\beta = \frac{B}{\mathfrak{A}} - \frac{A\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}^2}$.

§7 Leicht ist aber klar, dass auf diese Weise für alle einfachen Faktoren des Nenners Q dieselben Partialbrüche hervorgehen, zu welchen die zuvor dargestellte Methode führt. Denn wenn wir $\frac{P}{Q} = \frac{\alpha}{z-a} + R$ setzen und mit $z - a$ multiplizieren, wird

$$\frac{P(z-a)}{Q} = \alpha + R(z-a)$$

werden. Weil wir nun wissen, dass der gesuchte Zähler α eine Konstante ist, muss für ihn immer derselbe Wert hervorgehen, was auch immer für z geschrieben wird. Man setze also $z = a$, dass die Natur der übrigen Terme R aus der Rechnung herausgeht, und es wird

$$\alpha = \frac{P(z-a)}{Q}$$

werden, nachdem natürlich $z = a$ gesetzt worden ist; aber dann verschwindet so der Zähler wie der Nenner, woher, wenn an deren Stelle ihre Differentiale gesetzt werden,

$$\alpha = \frac{(z-a)dP + Pdz}{dQ}$$

werden wird. Nachdem also $z = a$ gesetzt worden ist, wird

$$\alpha = \frac{Pdz}{dQ}$$

sein. Aber oben haben wir angenommen, dass im Fall $z = a$ auch $P = A$ und $\frac{dQ}{dz} = \mathfrak{A}$ wird, sodass auch daher

$$\alpha = \frac{A}{\mathfrak{A}}$$

hervorgeht.

Fall II,
in welchem $(z-a)^2$ ein Faktor des Nenners Q ist

§8 Hier wird also in der Form, in welche wir unseren Bruch $\frac{P}{Q}$ für $z = a + \omega$ gesetzt überführen, $\mathfrak{A} = 0$ sein, woher der Bruch für diesen Fall so dargestellt werden können wird

$$\frac{1}{\omega\omega}\cdot\frac{A+B\omega+C\omega\omega}{\mathfrak{B}+\mathfrak{C}\omega+\mathfrak{D}\omega\omega}.$$

Hier entwickeln wir die Potenzen von ω natürlich nicht über die zweite hinaus. Nun führe man jenen Ausdruck auf diese Form

$$\frac{1}{\omega^2}(\alpha+\beta\omega+\gamma\omega\omega)$$

zurück und nach durchgeführter Rechnung wird man

$$\alpha=\frac{A}{\mathfrak{B}},\quad \beta=\frac{B}{\mathfrak{B}}-\frac{A\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}^2},\quad \gamma=\frac{C}{\mathfrak{B}}-\frac{B\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}^2}-\frac{A\mathfrak{D}}{\mathfrak{B}^2}+\frac{A\mathfrak{C}^2}{\mathfrak{B}^3}$$

finden. Nachdem diese Werte also gefunden worden sind, wird unser Bruch in diese Teile geteilt werden

$$\frac{\alpha}{\omega^2}+\frac{\beta}{\omega}+\gamma,$$

deren erste beiden wegen $\omega=z-a$ diese Partialbrüche liefern

$$\frac{\alpha}{(z-a)^2}+\frac{\beta}{z-a};$$

aber die Größe γ wird der Summe aller übrigen Terme gleich werden, wenn in ihnen freilich $z=a$ gesetzt wird.

Fall III,
In welchem $(z-a)^3$ ein Faktor des Nenners ist

§9 Hier wird also wegen $\mathfrak{A}=0$ und $\mathfrak{B}=0$ der Bruch

$$\frac{1}{\omega^3}\cdot\frac{A+B\omega+C\omega\omega+D\omega^3}{\mathfrak{A}+\mathfrak{D}\omega+\mathfrak{C}\omega\omega+\mathfrak{F}\omega^3},$$

welcher auf diese Form gebracht werde

$$\frac{1}{\omega^3}\cdot(\alpha+\beta\omega+\gamma\omega\omega+\delta\omega^3),$$

und zwar vermöge dieser Gleichheiten

$$A=\alpha\mathfrak{C},\quad B=\alpha\mathfrak{D}+\beta\mathfrak{C},\quad C=\alpha\mathfrak{E}+\beta\mathfrak{D}+\gamma\mathfrak{C},\quad D=\alpha\mathfrak{F}+\beta\mathfrak{E}+\gamma\mathfrak{D}+\delta\mathfrak{C},$$

nach Finden welcher Werte aus dem kubischen Faktor $(z-a)^3$ des Nenners Q diese Partialbrüche erhalten werden

$$\frac{\alpha}{(z-a)^3}+\frac{\beta}{(z-a)^2}+\frac{\gamma}{z-a}.$$

Aber δ bietet dahingegen die Summe aller übrigen Terme dar, wenn in selbigen überall $z=a$ geschrieben wird. Es wird aber leicht eingesehen, dass auf diese Weise auch zu höheren Potenzen übergegangen werden kann.

§10 Diese Methode führt auch zu einem Erfolg, wenn die Faktoren des Nenners imaginär waren, natürlich von der Form

$$z-a+b\sqrt{-1};$$

aber dann, weil auch $z-a-b\sqrt{-1}$ ein Faktor sein wird, werden die daraus entspringenden Partialbrüche

$$\frac{\alpha}{z-a+b\sqrt{-1}}+\frac{\beta}{z-a-b\sqrt{-1}}$$

leicht zu einem doppelten reellen zusammengezogen, dessen Nenner $(z-a)^2+bb$ sein wird. Es wird förderlich sein, dies am folgenden Beispiel gezeigt zu haben.

BEISPIEL

§11 *Wenn der aufzulösende Bruch* $\frac{P}{Q}=\frac{\sin\varphi}{\tan\varphi-\cos\varphi}$ *vorgelegt war, ihn in einfache Brüche aufzulösen.*

LÖSUNG

Hier müssen also zuerst alle Winkel φ gesucht werden, für welche der Nenner $\tan\varphi-\cos\varphi$ verschwindet. Man setze also

$$\tan\varphi-\cos\varphi=0 \quad \text{oder} \quad \sin\varphi-\cos^2\varphi=0,$$

sodass

$$\sin^2\varphi+\sin\varphi=1$$

ist, woher man

$$\sin\varphi = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

berechnet, und so hat man für $\sin\varphi$ die Werte

$$\sin\varphi = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad \sin\varphi = \frac{-1-\sqrt{5}}{2},$$

deren erster, weil er kleiner als die Einheit ist, einen reellen Wert für den Winkel φ geben wird. Weil nämlich näherungsweise

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,618034$$

ist, wird $\varphi = 38^\circ 10' 22''$ sein, welcher Winkel wir der Kürze wegen $= \zeta$ setzen wollen, sodass

$$\sin\zeta = 0,618034 \quad \text{und} \quad \cos\zeta = 0,786151$$

sowie

$$\tan\zeta = 0,786153$$

und daher, wie wir festgelegt haben,

$$\cos\zeta = \tan\zeta$$

ist.

§12 Aber der andere für $\sin\varphi$ gefundene Wert gibt $\sin\varphi = -1,618034$, welcher, weil er größer als die Einheit ist, zeigt, dass dieser Winkel imaginär ist, um welchem zu bestimmen man bemerke, dass

$$\cos\theta\sqrt{-1} = \frac{e^{-\theta} + e^{+\theta}}{2}$$

ist; weil dieser Wert offenkundig größer als die Einheit und freilich positiv ist, wollen wir diese Formel gebrauchen

$$\cos(\pi - \theta\sqrt{-1}) = \frac{-e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}.$$

Wenn wir also

$$\varphi = 90^\circ - \pi + \theta\sqrt{-1} = \theta\sqrt{-1} - \frac{\pi}{2}$$

setzen, wird

$$\sin\varphi = -\frac{e^{-\theta} + e^{+\theta}}{2}$$

sein, weswegen

$$\frac{e^{-\theta} + e^{\theta}}{2} = +1,618034 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

sein muss, für welche Zahl wir der Kürze wegen ε schreiben wollen, dass $e^{\theta} - e^{-\theta} = 2\varepsilon$ ist, woher man

$$e^{\theta} = \varepsilon + \sqrt{\varepsilon\varepsilon - 1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \varepsilon + \sqrt{\varepsilon}$$

berechnet und nach Einsetzen des Wertes wird $e^{\theta} = 2,890054$. Daher wird also $\theta = \log 2,890054$, indem man natürlich den hyperbolischen Logarithmus nimmt, der gefunden wird, wenn der gewöhnliche Logarithmus mit $2,3025851$ multipliziert wird. Weil also der gewöhnliche Logarithmus $0,4609060$ ist, wird

$$\theta = 0,4609060 \cdot 2,3025851 = 1,0612752$$

sein.

§13 Nachdem also diese Werte für ζ und θ gefunden worden sind, sind aus dem ersten $\varphi = \zeta$ alle Winkel φ, durch welchen unser Nenner $\tan\varphi - \cos\varphi$ verschwindet, im Allgemeinen

$$2i\pi + \zeta \quad \text{und} \quad (2i+1)\pi - \zeta,$$

die alle denselben Sinus haben, woher alle einfachen reellen Faktoren gefunden werden. Für die imaginären muss aber anstelle von ζ nur $\theta\sqrt{-1} - \frac{1}{2}\pi$ geschrieben werden und zugleich werden alle imaginären Faktoren erhalten.

§14 Zuerst sei also ein Faktor unseres Nenners $\varphi - 2i\pi - \zeta$ und man setze diesen Faktor $= \omega$, sodass

$$\varphi = 2i\pi + \zeta + \omega,$$

und es wird sein

$$\sin\varphi = \sin(\zeta + \omega) = \sin\zeta\cos\omega + \cos\zeta\sin\omega = \sin\zeta + \omega\cos\zeta,$$

weil es ja nicht notwendig ist, nicht weiter als bis zur ersten Dimension von ω fortzuschreiten. Darauf wird aber

$$\cos\varphi = \cos(\zeta + \omega) = \cos\zeta - \omega\sin\zeta,$$

schließlich

$$\tan\varphi = \tan(\zeta + \omega) = \tan\zeta + \frac{\omega}{\cos^2\zeta}.$$

Daher wird also der Nenner

$$\tan\zeta - \cos\zeta + \omega\left(\sin\zeta + \frac{1}{\cos^2\zeta}\right)$$

sein; aber per Annahme ist $\tan\zeta - \cos\zeta = 0$, woher dieser Nenner

$$\omega\left(\sin\zeta + \frac{1}{\cos^2\zeta}\right)$$

sein wird. Hier bemerke man, wenn wir genauer hätten vorgehen wollen, dass im Nenner darüber hinaus der Term ω^2 eingegangen ist, welcher sich hier missachten lässt, weil kein Faktor zweimal auftaucht. Daher entsteht also der unendliche Wert unseres Bruchs

$$\frac{\sin\zeta}{\omega\left(\sin\zeta + \frac{1}{\cos^2\zeta}\right)} = \frac{\sin\zeta\cos^2\zeta}{\omega(\sin\zeta\cos^2\zeta + 1)},$$

woraus dieser Partialbruch abgeleitet wird

$$\frac{\sin\zeta\cos^2\zeta}{\sin\zeta\cos^2\zeta + 1} \cdot \frac{1}{\varphi - 2i\pi - \zeta}.$$

Wenn wir also für i alle positiven wie negativen Zahlen einsetzen, wird diese Reihe von Brüchen

$$\frac{\sin\zeta\cos^2\zeta}{1+\sin\zeta\cos^2\zeta}\left(\frac{1}{\varphi-\zeta}+\frac{1}{\varphi-2\pi-\zeta}+\frac{1}{\varphi+2\pi-\zeta}+\frac{1}{\varphi-4\pi-\zeta}+\frac{1}{\varphi+4\pi-\zeta}+\text{etc.}\right)$$

hervorgehen. Aber wenn wir für ζ jetzt $\theta\sqrt{-1}-\frac{1}{2}\pi$ schreiben, wird die Reihe von imaginären Brüchen sein

$$\frac{\sin\zeta\cos^2\zeta}{1+\sin\zeta\cos^2\zeta}\left\{\begin{array}{c}\dfrac{1}{\varphi+\frac{1}{2}\pi-\theta\sqrt{-1}}+\dfrac{1}{\varphi-\frac{3}{2}\pi-\theta\sqrt{-1}}+\dfrac{1}{\varphi+\frac{5}{2}\pi-\theta\sqrt{-1}}\\ +\dfrac{1}{\varphi-\frac{7}{2}\pi-\theta\sqrt{-1}}+\text{etc.}\end{array}\right\}.$$

§15 Für den anderen Fall, in welchem im Allgemeinen der Faktor

$$\varphi-(2i+1)\pi+\zeta=\omega$$

war, wird

$$\varphi=(2i+1)\pi-\zeta+\omega$$

sein, und daher

$$\sin\varphi=\sin(\zeta-\omega)=\sin\zeta-\omega\cos\zeta,$$

dann aber

$$\cos\varphi=-\cos(\zeta-\omega)=-\cos\zeta-\omega\sin\zeta$$

und

$$\tan\varphi=-\tan(\zeta-\omega)=-\tan\zeta+\frac{\omega}{\cos^2\zeta},$$

woher der ganze Nenner

$$-\tan\zeta+\cos\zeta+\omega\left(\frac{1}{\cos^2\zeta}+\sin\zeta\right)=\omega\left(\sin\zeta+\frac{1}{\cos^2\zeta}\right)$$

wegen $-\tan\zeta+\cos\zeta=0$ sein wird, weshalb der unendliche Teil unseres Bruchs

$$\frac{\sin\zeta}{\omega\left(\sin\zeta+\frac{1}{\cos^2\zeta}\right)}=\frac{\sin\zeta\cos^2\zeta}{\omega(1+\sin\zeta\cos^2\zeta)}$$

sein wird. Nun wird also, wenn wir anstelle von ω den angenommenen Wert

$$\varphi-(2i+1)\pi+\zeta$$

schreiben, diese allgemeine Form von einfachen Brüchen entspringen

$$\frac{\sin\zeta\cos^2\zeta}{(1+\sin\zeta\cos^2\zeta)}\cdot\frac{1}{\varphi-(2i+1)\pi+\zeta}.$$

Wir wollen also anstelle von i nacheinander alle Werte 0, ±1, ±2, ±3, ±4 etc. schreiben und man wird die folgende Reihe an Brüchen berechnen

$$\frac{\sin\zeta\cos^2\zeta}{1+\sin\zeta\cos^2\zeta}\left(\frac{1}{\varphi-\pi+\zeta}+\frac{1}{\varphi+\pi+\zeta}+\frac{1}{\varphi-3\pi+\zeta}+\frac{1}{\varphi+3\pi+\zeta}+\frac{1}{\varphi-5\pi+\zeta}+\text{etc.}\right).$$

Wenn wir also nun hier $\theta\sqrt{-1}-\frac{1}{2}\pi$ für ζ schreiben, werden die imaginären Brüche hervorgehen, welche

$$\frac{\sin\zeta\cos^2\zeta}{1+\sin\zeta\cos^2\zeta}\left\{\begin{array}{c}\dfrac{1}{\varphi+\frac{1}{2}\pi+\theta\sqrt{-1}}+\dfrac{1}{\varphi-\frac{3}{2}\pi+\theta\sqrt{-1}}+\dfrac{1}{\varphi+\frac{5}{2}\pi+\theta\sqrt{-1}}\\ +\dfrac{1}{\varphi-\frac{7}{2}\pi+\theta\sqrt{-1}}+\text{etc.}\end{array}\right\}$$

sein werden.

§16 Wir wollen nun zuerst einzeln alle reellen Brüche berechnen, und weil alle denselben konstanten Koeffizienten

$$\frac{\sin\zeta\cos^2\zeta}{1+\sin\zeta\cos^2\zeta}$$

haben, wollen wir vor allem nach seinem numerischen Wert suchen. Weil also zuerst

$$\sin\zeta-\cos^2\zeta=0$$

war, wird

$$\cos^2 \zeta = \sin \zeta$$

sein und daher dieser Koeffizient

$$= \frac{\sin^2 \zeta}{1 + \sin^2 \zeta};$$

weiter war aber

$$\sin^2 \zeta + \sin \zeta = 1$$

und daher

$$\sin^2 \zeta = 1 - \sin \zeta$$

war, woher der Koeffizient

$$\frac{1 - \sin \zeta}{2 - \sin \zeta}$$

wird. Schließlich haben wir für die reellen Werte $\sin \zeta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ gefunden, woher unser Koeffizient

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}} = \frac{5 - \sqrt{5}}{10}$$

werden wird, dessen Wert also $0,2763932$ sein wird, für welchen wir der Kürze wegen α schreiben wollen, und alle einfachen reellen Brüche werden, geordnet dargestellt,

$$\frac{\alpha}{\varphi - \zeta} + \frac{\alpha}{\varphi - \zeta - 2\pi} + \frac{\alpha}{\varphi - \zeta + 2\pi} + \frac{\alpha}{\varphi - \zeta - 4\pi} + \frac{\alpha}{\varphi - \zeta + 4\pi} + \text{etc.}$$

$$\frac{\alpha}{\varphi + \zeta - \pi} + \frac{\alpha}{\varphi + \zeta + \pi} + \frac{\alpha}{\varphi + \zeta - 3\pi} + \frac{\alpha}{\varphi + \zeta + 3\pi} ++ \frac{\alpha}{\varphi + \zeta - 5\pi} + \text{etc.}$$

sein.

§17 Für die imaginären Anteile wird aber derselbe gemeinsame Koeffizient

$$\frac{\sin\zeta\cos^2\zeta}{1+\sin\zeta\cos^2\zeta}$$

wegen

$$\cos^2\zeta = \sin\zeta \quad \text{und} \quad \sin^2 = 1-\sin\zeta$$

wie zuvor in diese Form überführt

$$\frac{1-\sin\zeta}{2-\sin\zeta}.$$

Aber für die imaginären Anteile haben wir $\sin\zeta = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ gefunden, in welchem schon die zuvor erwähnte Substitution $\zeta = \theta\sqrt{-1}-\frac{1}{2}\eta$ enthalten ist. Nachdem also dieser Wert eingesetzt worden ist, wird der gemeinsame Koeffizient

$$\frac{3+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$$

sein und daher in Zahlen $0,7236068$, für welche Zahl wir β schreiben wollen, sodass $\alpha+\beta=1$ ist. Deswegen werden die zwei Reihen von imaginären Brüchen sein

$$\frac{\beta}{\varphi-\theta\sqrt{-1}+\frac{1}{2}\pi}+\frac{\beta}{\varphi-\theta\sqrt{-1}-\frac{3}{2}\pi}+\frac{\beta}{\varphi-\theta\sqrt{-1}+\frac{5}{2}\pi}+\frac{\beta}{\varphi-\theta\sqrt{-1}-\frac{7}{2}\pi}+\text{etc.}$$

$$\frac{\beta}{\varphi+\theta\sqrt{-1}+\frac{1}{2}\pi}+\frac{\beta}{\varphi+\theta\sqrt{-1}-\frac{3}{2}\pi}+\frac{\beta}{\varphi+\theta\sqrt{-1}+\frac{5}{2}\pi}+\frac{\beta}{\varphi+\theta\sqrt{-1}-\frac{7}{2}\pi}+\text{etc.}$$

Wenn also je zwei von diesen Brüchen zu einer Summe gesammelt werden, werden sich die imaginären Anteile gegenseitig aufheben und es wird die folgende Reihe hervorgehen

$$\frac{\beta(2\varphi+\pi)}{\left(\varphi+\frac{1}{2}\pi\right)^2+\theta\theta}+\frac{\beta(2\varphi-3\pi)}{\left(\varphi-\frac{3}{2}\pi\right)^2+\theta\theta}+\frac{\beta(2\varphi+5\pi)}{\left(\varphi+\frac{5}{2}\pi\right)^2+\theta\theta}+\frac{\beta(2\varphi-7\pi)}{\left(\varphi-\frac{7}{2}\pi\right)^2+\theta\theta}+\text{etc.},$$

wo man bemerke, dass $\theta\theta = 1,1263051$ ist.

§18 Weil ja die imaginären Anteile es ja zuließen bequem zusammengefasst zu werden, wollen wir, damit eine ähnliche Zusammenfassung in den reellen Anteilen gelingt, $\zeta = \frac{1}{2}\pi + \eta$ setzen und die beiden Reihen werden sich so verhalten

$$\frac{\alpha}{\varphi - \frac{1}{2}\pi - \eta} + \frac{\alpha}{\varphi + \frac{3}{2}\pi - \eta} + \frac{\alpha}{\varphi - \frac{5}{2}\pi - \eta} + \frac{\alpha}{\varphi + \frac{7}{2}\pi - \eta} + \frac{\alpha}{\varphi - \frac{9}{2}\pi - \eta} + \text{etc.}$$

$$\frac{\alpha}{\varphi - \frac{1}{2}\pi + \eta} + \frac{\alpha}{\varphi + \frac{3}{2}\pi + \eta} + \frac{\alpha}{\varphi - \frac{5}{2}\pi + \eta} + \frac{\alpha}{\varphi + \frac{7}{2}\pi + \eta} + \frac{\alpha}{\varphi - \frac{9}{2}\pi + \eta} + \text{etc.}$$

Hier kommt also jedem Term quasi ein Begleiter zu und, nachdem je zwei zusammengezogen worden sind, wird die folgende Reihe entspringen

$$\frac{\alpha(2\varphi - \pi)}{\left(\varphi - \frac{1}{2}\pi\right)^2 - \eta\eta} + \frac{\alpha(2\varphi + 3\pi)}{\left(\varphi + \frac{3}{2}\pi\right)^2 - \eta\eta} + \frac{\alpha(2\varphi - 5\pi)}{\left(\varphi - \frac{5}{2}\pi\right)^2 - \eta\eta} + \frac{\alpha(2\varphi + 7\pi)}{\left(\varphi + \frac{7}{2}\pi\right)^2 - \eta\eta} + \text{etc.},$$

wo man bemerke, weil $\eta = \zeta - \frac{1}{2}\pi$ ist, da ja in Kreisteilen $\zeta = 0,6662405$, dass $\eta = 0,904558$ und daher $\eta\eta = 0,8182214$ sein wird, weil zuvor $\theta\theta = 1,1263051$ ist.

§19 Was also bisher alles erwähnt worden ist, geht darauf zurück, dass der vorgelegte Bruch $\frac{\sin\varphi}{\tan\varphi - \cos\varphi}$ den folgenden zwei Reihen zusammen genommen gleich wird

$$\frac{\alpha(2\varphi - \pi)}{\left(\varphi - \frac{1}{2}\pi\right)^2 - \eta\eta} + \frac{\alpha(2\varphi + 3\pi)}{\left(\varphi + \frac{3}{2}\pi\right)^2 - \eta\eta} + \frac{\alpha(2\varphi - 5\pi)}{\left(\varphi - \frac{5}{2}\pi\right)^2 - \eta\eta} + \frac{\alpha(2\varphi + 7\pi)}{\left(\varphi + \frac{7}{2}\pi\right)^2 - \eta\eta} + \text{etc.}$$

$$\frac{\beta(2\varphi + \pi)}{\left(\varphi + \frac{1}{2}\pi\right)^2 + \theta\theta} + \frac{\beta(2\varphi - 3\pi)}{\left(\varphi + \frac{3}{2}\pi\right)^2 + \theta\theta} + \frac{\beta(2\varphi + 5\pi)}{\left(\varphi + \frac{5}{2}\pi\right)^2 + \theta\theta} + \frac{\beta(2\varphi - 7\pi)}{\left(\varphi - \frac{7}{2}\pi\right)^2 + \theta\theta} + \text{etc.}$$

Daher folgt also, wenn man $\varphi = 0$ nimmt, in welchem Fall der Bruch selbst zu Null wird, dass

$$0 = -\frac{4 \cdot 1\alpha\pi}{\pi\pi - 4\eta\eta} + \frac{4 \cdot 3\alpha\pi}{9\pi\pi - 4\eta\eta} - \frac{4 \cdot 5\alpha\pi}{25\pi\pi - 4\eta\eta} + \frac{4 \cdot 7\alpha\pi}{49\pi\pi - 4\eta\eta} - \text{etc.}$$
$$+\frac{4 \cdot 1\beta\pi}{\pi\pi + 4\theta\theta} - \frac{4 \cdot 3\beta\pi}{9\pi\pi + 4\theta\theta} + \frac{4 \cdot 5\beta\pi}{25\pi\pi + 4\theta\theta} - \frac{4 \cdot 7\beta\pi}{49\pi\pi + 4\theta\theta} + \text{etc.}$$

Außerdem scheint dieses Beispiel mehr als geeignet, die Anwendung auf imaginäre Faktoren zu illustrieren.